

Q12 Kurvendiskussion: Übersicht und Vorgehensweise

Es werden hier überwiegend Tipps für die Untersuchung ganzrationaler Funktionen (Polynomfunktionen) gegeben, wobei die Vorgehensweise auf andere Funktionstypen grundsätzlich übertragen werden kann.

1. Definitionsmenge:

Die jeweilige Funktion muss auf Definitionslücken untersucht werden.

- ganzrationale Funktionen: ganz $\mathbb{R}$
- gebrochenrationale Funktionen: Beachte Nullstellen des Nenners
- Wurzelfunktionen: Argument der Wurzelfunktion muss größer oder gleich Null sein
- $\ln$ – Funktion: Argument der $\ln$ – Funktion muss größer als Null sein

2. Symmetrie:

Allgemeiner Ansatz der Untersuchung: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse
 $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

Speziell für ganzrationale Funktionen: nur gerade Exponenten $\Rightarrow$ Achsensymmetrie
nur ungerade Exponenten $\Rightarrow$ Punktsymmetrie

Im Falle einer symmetrischen Funktion, kann man sich die Hälfte der Arbeit „sparen“!!!

3. Nullstellen der Funktion

Allgemeiner Ansatz zur Untersuchung: $f(x) = 0$

Vorgehensweise:

- Ausklammern, wenn möglich, von $x^n \Rightarrow$ n-fache Nullstelle bei $x_0 = 0$
- Erraten einer Nullstelle $x_1 \Rightarrow$ Polynomdivision des Funktionsterms durch $(x - x_1)$
- Lösungsformel ist nur für quadratische Gleichungen benutzbar
- Lineare Gleichungen mit Äquivalenzumformungen auflösen

Die Vielfachheit einer Nullstelle ermöglicht einige interessante Schlussfolgerungen:

- Ungerade Vielfachheit $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel der Funktion
- Gerade Vielfachheit $\Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel der Funktion
- Die Vielfachheit einer Nullstelle nimmt pro Ableitung um eins ab.
- Die Vielfachheit verrät außerdem etwas über den Verlauf des Graphen in der Umgebung der Nullstelle:
 - * Einfache Nullstelle: Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse
 - * Doppelte Nullstelle: Berührungspunkt / Extrempunkt an der Nullstelle
 - * Dreifache Nullstelle: Terrassenpunkt an der Nullstelle

4. Die 1. Ableitung und deren Nullstellen

Die 1. Ableitung benötigt man zur Untersuchung der Monotonie und zum Suchen der Extrempunkte. Die Nullstellen findet man wie unter 3. beschrieben. Kennt man mehrfache Nullstellen der Funktion, kennt man auch Nullstellen der 1. Ableitung.

5. Die 2. Ableitung und deren Nullstellen

Die 2. Ableitung benötigt man zur Untersuchung der Krümmung und zum Suchen der Flach- und Wendepunkte. Die Nullstellen findet man wieder wie unter 3. beschrieben. Kennt man mehrfache Nullstellen der 1. Ableitung, kennt man auch Nullstellen der 2. Ableitung.

6. Extrempunkte

Allgemeiner Ansatz zur Untersuchung: $f'(x) = 0$

Die Vielfachheit der Nullstelle x_2 ermöglicht wieder interessante Schlussfolgerungen:

- Ungerade Vielfachheit $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel von f' $\Rightarrow$ Extrempunkt an der Stelle x_2
- gerade Vielfachheit $\Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel von f' $\Rightarrow$ Terrassenpunkt an der Stelle x_2

Die Art der Extremstelle über die 1. Ableitung:

- Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung von + nach - $\Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle x_2
- Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung von - nach + $\Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle x_2

Die Art der Extremstelle über die Krümmung (2. Ableitung):

- Gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) < 0$, so liegt an der Stelle x_2 ein relatives Maximum vor
- Gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) > 0$, so liegt an der Stelle x_2 ein relatives Minimum vor

Den y-Wert der Extrempunkte erhält man, in dem man die x-Werte in $f(x)$ einsetzt.

7. Monotonie

Die Monotonie ändert sich nur an Nullstellen der 1. Ableitung mit ungerader Vielfachheit!

Man kann in den Intervallen dazwischen jeweils einen Wert von f' berechnen oder die Skizze des Graphen der 1. Ableitung auswerten und dann auf die Monotonie schließen:

Monotonie

- $f'(x) < 0$ $\Rightarrow$ der Graph ist streng monoton fallend
- $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ der Graph ist streng monoton steigend

8. Wendepunkt und Krümmung

Allgemeiner Ansatz zur Untersuchung: $f''(x) = 0$

Die Vielfachheit der Nullstelle x_3 der 2. Ableitung ermöglicht interessante Schlussfolgerungen:

- ungerade Vielfachheit $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel von f'' $\Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle x_3
- gerade Vielfachheit $\Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel von f'' $\Rightarrow$ Flachpunkt ohne Änderung der Krümmung an der Stelle x_3

Den y-Wert der Wendepunkte erhält man, in dem man die x-Werte in $f(x)$ einsetzt.

Krümmung:

- $f''(x_2) < 0$, der Graph ist rechtsgekrümmt (die Steigung nimmt ab).
- $f''(x_2) > 0$, der Graph ist linksgekrümmt (die Steigung nimmt ab).

9. Verhalten im Unendlichen

Alle ganzrationalen Funktionen sind im Unendlichen bestimmt divergent, d.h. sie gehen gegen $\pm\infty$. Der Term mit dem höchsten Exponenten bestimmt dabei das Verhalten im Unendlichen.

10. Zeichnung

Verwende alle besonderen Punkte (Nullstellen, Extremstellen, Flach- und Wendepunkte) sowie, falls nötig, weitere Stützpunkte für eine Zeichnung. Beachte dabei auch das Verhalten im Unendlichen und das Symmetrieverhalten.