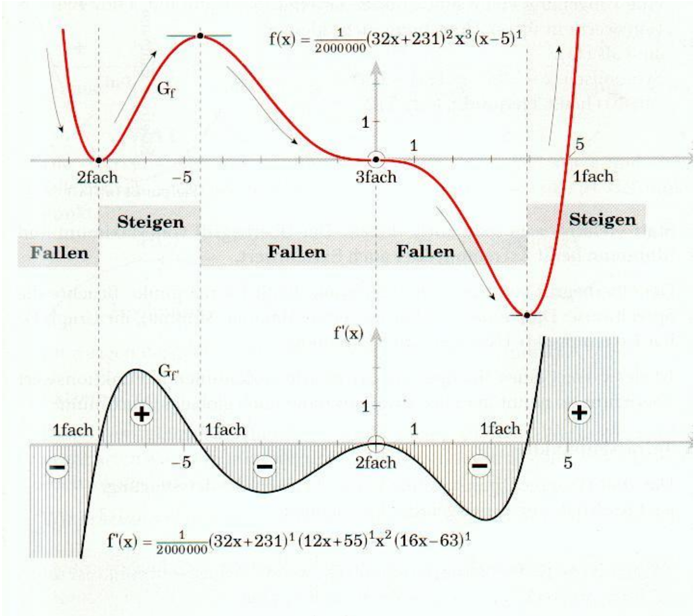
Zusammenhang zwischen Nullstellen von f(x) und f'(x):

Ist a eine zwei- oder mehrfache Nullstelle von f(x), so ist die x-Achse Tangente von G_f in (a|0). (a|0) ist also eine Stelle mit waagrechter Tangente: f'(x) = 0.

Es gilt: Eine zwei- oder mehrfache Nullstelle von f(x) ist auch Nullstelle von f'(x).

Graph der Funktion f:

Graph der Ableitung f':



1. Gib die Bereiche an, in denen die Kurve streng monoton steigt oder fällt (Monotoniebetrachtung):

a) $f(x) = x^2 - x$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

c) $f(x) = x^3 + x$

d) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$

e) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

f) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x$

2. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3$ mit $x \in R$. Ihr Graph heißt G_f.

a) Bestimme die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen!

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - x^3 = x^3 \cdot \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0$

⇒ eine dreifache Nullstelle $x_{1/2/3} = 0$ (Verlauf des Graphen beachten)
⇒ eine einfache Nullstelle $x_4 = 2$

b) Bestimme das Verhalten der Funktion im Unendlichen!

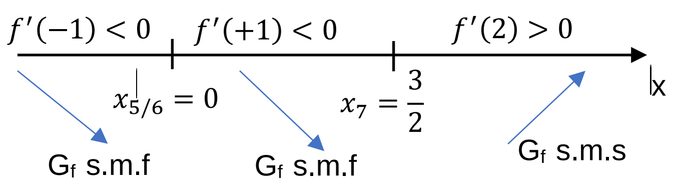
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x^4 - x^3 = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x^4 - x^3 = +\infty$ $\quad$ (Höchste Potenz von x beachten!)

c) Bestimme das Monotonieverhalten von f und gib die Lage und Art der Extrempunkte von G_f an.

$f'(x) = 2x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (2x - 3) = 0$

⇒ eine doppelte Nullstelle $x_{5/6} = 0$
⇒ eine einfache Nullstelle $x_7 = \frac{3}{2}$

Monotoniebetrachtung „rechnerisch“ (auch mit Skizze der Ableitung möglich):



TP(0|0) $\quad$ $TIP\left(\frac{3}{2} \,|\, -\frac{27}{32}\right)$

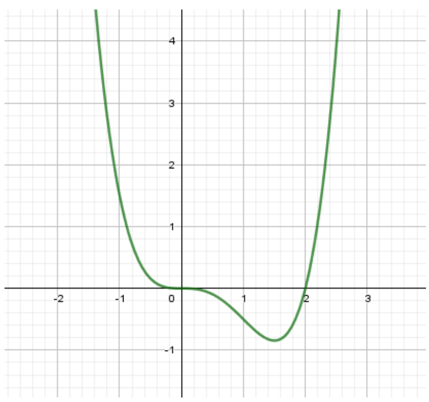
d) In welchen Punkten hat der Graph G_f die Steigung -5?
Gib die Gleichung der Tangente in diesem Punkt an.

$\Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 3x^2 = -5 \quad \Rightarrow \quad 2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$

⇒ Die einzige x-Stelle für dies zutrifft, finden wir für $x_8 = -1$
⇒ Punkt auf dem Graphen $P = \left(-1 \middle| f(-1)\right) = (-1|1{,}5)$
⇒ Steigung der Tangenten $f'(-1) = -5$ (auch laut Aufgabenstellung)

⇒ Tangente: $y = m \cdot x + t \Leftrightarrow 1{,}5 = -5 \cdot (-1) + t \Leftrightarrow t = -3{,}5 \Leftrightarrow y = -5x - 3{,}5$

e) Berechne $f(-1)$ und $f(2{,}5)$!
Zeichne G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.



Bsp.: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 = x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (x^2 - 6)$

Nullstellen:

$x_{1/2} = 0$ $\Rightarrow$ Extremstelle, da doppelte Nullstelle
$x_3 = +\sqrt{6} \approx +2{,}5$
$x_4 = -\sqrt{6} \approx -2{,}5$

Verhalten im Unendlichen (Betrachte höchste Potenz!):

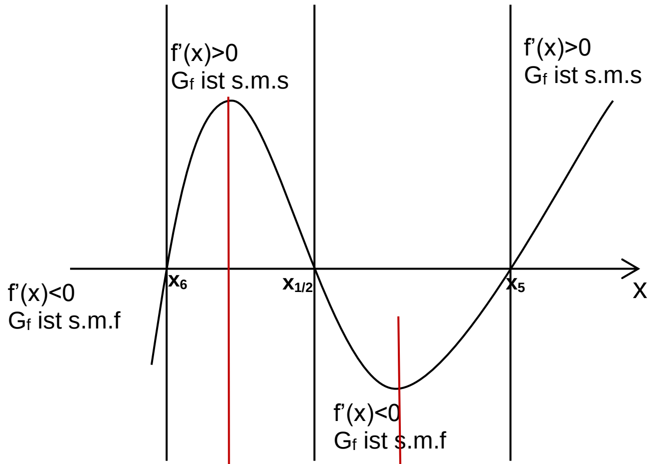
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 = +\infty$

Extrempunkte:

$f'(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x = 2x \cdot (x^2 - 3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (x^2 - 3) \Leftrightarrow$ $x_{1/2} = 0$
$x_5 = +\sqrt{3} \approx +1{,}7$
$x_6 = -\sqrt{3} \approx -1{,}7$

Monotoniebetrachtung von G_f mit Hilfe einer Skizze von f':



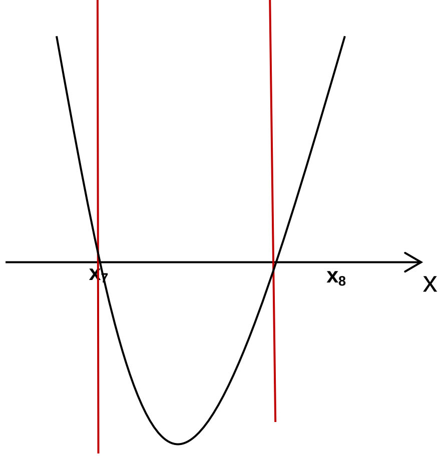
Aus der Monotoniebetrachtung folgt:

$\mathrm{MIN}\left(-\sqrt{3}|-4{,}5\right)$ $MAX(0|0)$ $\mathrm{MIN}\left(+\sqrt{3}|-4{,}5\right)$

Orte der lokal „größten" Steigung:

$f''(x) = 6 \cdot x^2 - 6 = 6 \cdot (x^2 - 1)$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$ $x_7 = -1$
$x_8 = +1$

Skizze von f'':



Die Nullstellen der Ableitung von der Ableitung,
also die Nullstellen von f''(x) bestimmen diese Orte:

$P_1(-1|-2{,}5)$ $P_2(+1|-2{,}5)$

Die Steigung in diesen speziellen Punkten erhalten wir mit der ersten Ableitung:

$f'(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) = 5$

$f'(+1) = 2 \cdot (+1)^3 - 6 \cdot (+1) = -5$

Zeichnung:
Mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse kann eine Zeichnung erstellt werden. Berechne gegebenenfalls weitere Punkte des Graphen!