WGS

Differenzierbarkeit von Funktionen

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = -0{,}25x^2 + 3{,}5x - 7{,}25$

und $g(x) = 0{,}25x^3 - 2{,}25x^2 + 6x - 1$

Beide Funktionen schneiden sich an der Stelle $x_0 = 5$ und es kann folgende zusammengesetzte Funktion $h(x)$ gebildet werden:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für alle } \; x \leq 5 \\ g(x) & \text{für alle } \; x > 5 \end{cases}$$

a) Überprüfe die Funktion $h(x)$ auf Differenzierbarkeit im Definitionsbereich R!

b) Führe für beide Funktionen eine Kurvendiskussion durch und zeichne den Graphen der Funktion h.

c) Berechne den Knickwinkel der Funktion $h(x)$ an der Nahtstelle.

Lösungsvorschlag

Teilaufgabe a)

Überprüfe den Differentialquotienten an der Stelle $x_0 = 5$ bei rechtsseitiger und linksseitiger Annäherung!

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-0{,}25(5+h)^2+3{,}5(5+h)-7{,}25-4}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{-0{,}25\left(25+10h+h^2\right)+17{,}5+3{,}5h-11{,}25}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{-6{,}25-2{,}5h-0{,}25h^2+3{,}5h+6{,}25}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{h-0{,}25h^2}{h} = \lim_{x \to 0^-} 1 - 0{,}25h = 1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(5+h)-g(5)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0{,}25(5+h)^3-2{,}25(5+h)^2+6(5+h)-1-4}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{0{,}25\left(125+75h+15h^2+h^3\right)-2{,}25\left(25+10h+h^2\right)+30+6h-5}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{31{,}25+18{,}75h+3{,}75h^2+0{,}25h^3-56{,}25-22{,}5h-2{,}25h^2+25+6h}{h}$$

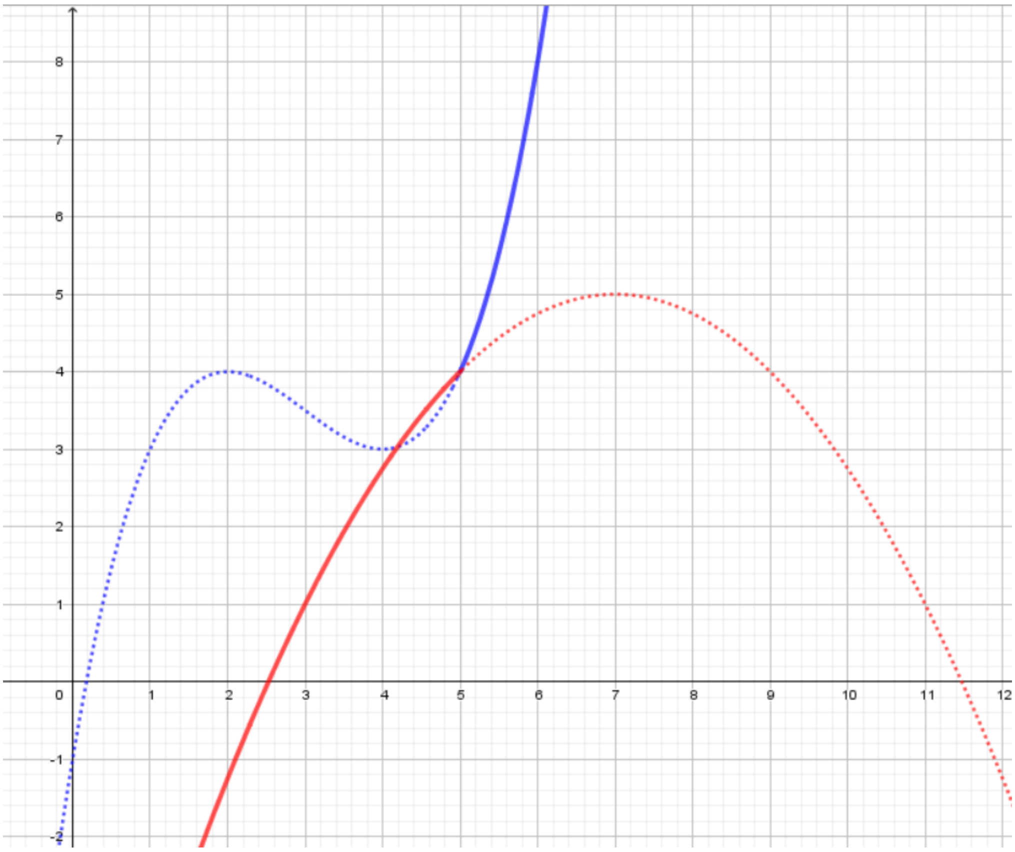
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{2{,}25h+1{,}5h^2+0{,}25h^3}{h} = \lim_{x \to 0^-} 2{,}25 + 1{,}5h + 0{,}25h^2 = 2{,}25$$

Die Grenzwerte liefern bei links- und rechtsseitiger Annäherung an die Nahtstelle $x_0 = 5$ unterschiedliche Ergebnisse. Die Funktion h ist also nicht differenzierbar, d.h. weist an der Nahtstelle $x_0 = 5$ einen Knick auf!

Teilaufgabe b)
Diskutiere beide Teilfunktionen g und f und fertige eine genaue Zeichnung der zusammengesetzten Funktion h an!

$f(x) = -0{,}25x^2 + 3{,}5x - 7{,}25$	$g(x) = 0{,}25x^3 - 2{,}25x^2 + 6x - 1$
Nullstellen: $f(x) = -0{,}25x^2 + 3{,}5x - 7{,}25 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 - 7{,}25}}{-0{,}5} = \frac{-3{,}5 \pm \sqrt{5}}{-0{,}5}$ $\Rightarrow\ x_1 \approx 2{,}5$ und $x_2 \approx 11{,}5$	**Nullstellen:** $g(x) = 0{,}25x^3 - 2{,}25x^2 + 6x - 1 = 0$ Ein Erraten der Nullstellen ist nicht möglich!
Extremstellen: $f'(x) = 0$ $f'(x) = -0{,}5x + 3{,}5 = 0$ $\Rightarrow x_E = 7$ $\Rightarrow E(7\|5)$ $\boldsymbol{E}$ ist ein Maximum, da G_f eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Stauchungsfaktor 0,25 ist.	**Extremstellen:** $g'(x) = 0$ $g'(x) = 0{,}75x^2 - 4{,}5x + 6$ $x_{1/2} = \frac{4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25 - 18}}{1{,}5} = \frac{4{,}5 \pm 1{,}5}{1{,}5}$ $\Rightarrow\ x_1 = 2{,}0$ und $x_2 = 4{,}0$ **<u>Monotoniebetrachtung:</u>** $g'(0) = +6 > 0 \Rightarrow G_g$ ist s.m.s. $Max(2\|4)$ $g'(3) = -0{,}75 < 0 \Rightarrow G_g$ ist s.m.f. $M\mathrm{in}(4\|3)$ $g'(8) = +18 > 0 \Rightarrow G_g$ ist s.m.s.
Punkte des Graphen: Diese lassen sich durch den Scheitelpunkt $E(7\|5)$und dem Stauchungsfaktor unmittelbar angeben: $E(7\|5)$ $P_1(6\|4{,}75)$ und $Q_1(8\|4{,}75)$ $P_2(5\|4)$ und $Q_2(9\|4)$ $P_1(3\|1)$ und $Q_1(11\|1)$	**Zusätzliche Punkte durch Einsetzen:** $P_1(0\|-1)$; $P_2(1\|3)$; $P_3(3\|3{,}5)$; $P_4(5\|4)$; $P_1(6\|8)$

<u>Zeichnung des Graphen der Funktion h</u>

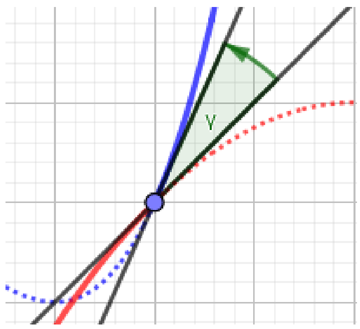


c) Berechnung des Knickwinkels:

Lösungsidee: Berechne Schnittwinkel der beiden Tangenten am Punkt der Nahtstelle:

Steigung $m_f = 1 \quad \Rightarrow$ Schnittwinkel mit x-Achse: $\alpha = 45°$

Steigung $m_g = 2{,}25 \quad \Rightarrow$ Schnittwinkel mit x-Achse: $\beta \approx 66°$



Schnittwinkel: $\gamma = 66° - 45° = 21°$